Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Volkswirtschaftslehre (ECON)

Lehrstuhl für Ökonometrie und Statistik

Kapitel XIV - Konvergenz und Grenzwertsätze

Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. Dr. W.-D. Heller
Hartwig Senska
Carlo Siebenschuh

Konvergenz

Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie: Math. Modellierung von Zufallsvorgängen.

Ziel: Berechenbarkeit von Zufallsvorgängen soweit möglich.

Ansatz: Ereignissen und ihren beobachtbaren Ergebnissen in sinnvoller Weise Wahrscheinlichkeiten zuordnen.

Konvergenz

Phänomen:

Relative Häufigkeiten entsprechen nach vielen Wiederholungen Wahrscheinlichkeiten.

Folgerung daraus (nach vielen Wiederholungen):

a) arithm. Mittel $\approx$ Erwartungswert
b) relative Häufigkeit des Eintretens eines Ereignisses $\approx$ Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
c) empirische Verteilungsfunktion $\approx$ theoretische Verteilungsfunktion

Konvergenz

Zufallsvorgang modelliert durch Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, A(\Omega), P)$

Wahrscheinlichkeitsraum der n-fachen unabhängigen Wiederholung:

$$(\Omega^n, A^n(\Omega), P^{(n)})$$

mit Grundgesamtheit:

$$\Omega^n = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n | \omega_i \in \Omega\}$$

Für $P^{(n)}$ gilt:

$$P^{(n)}(A_1 \times \ldots \times A_n) = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

wobei $(A_1 \times \ldots \times A_n)$ Ereignisse in $A^n(\Omega)$

Konvergenz

Wahrscheinlichkeitsraum der unendlichfachen unabhängigen Wiederholung:

Grundgesamtheit: $\Omega^{\mathbb{N}}$

Menge der Folgen $(\omega_1, \omega_2, \ldots) = (\omega_i)_{i=1,2,\ldots}$

Gesucht: Wahrscheinlichkeitsmaß $P^{\mathbb{N}}$ auf $\Omega^{\mathbb{N}}$

Für das Wahrscheinlichkeitsmaß $P^{\mathbb{N}}$ gilt:

$$P^{\mathbb{N}}(A_1 \times \ldots \times A_n) = \prod_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

($\neq 0$ nur, wenn $P(A_i) < 1$ für nur endlich viele i)

Konvergenz

Behauptung: Relative Häufigkeit eines Ereignisses konvergiert gegen die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.

$(\Omega, A(\Omega), P)$ ist Wahrscheinlichkeitsraum (Modell eines Zufallsprozesses)

$A \in A(\Omega)$ ist Ereignis $\quad (A \subset \Omega)$

Zu A gehört die Zufallsvariable: $\mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

(„Indikatorfunktion zu A“)

Konvergenz

$\mathbb{1}_A$ Bernoulli-verteilt

$$P(\mathbb{1}_A = 1) = P(\{\omega | \mathbb{1}_A(\omega) = 1\}) = P(A)$$

n-fache unabhängige Wiederholung von $\mathbb{1}_A$:

$Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig identisch verteilt wie $\mathbb{1}_A$

($Y_i = 1$: Ereignis A tritt bei i-ter Wiederholung ein.)

Konvergenz

Relative Häufigkeit des Ereignisses A bei n unabhängigen Wiederholungen ist zufällig, da abhängig vom zufälligen Verlauf:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad \text{absolute Häufigkeit des Ereignisses } A$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad \text{relative Häufigkeit des Ereignisses } A$$

Konvergenz

Fragestellung:

1.) Was bedeutet $\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i}_{\text{ZV}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} P(A) \in \mathbb{R}$?

2.) Was bedeutet in diesem Zusammenhang Konvergenz?

3.) Wie kann Konvergenz hier mathematisch präzisiert werden?

Konvergenz

Hilfssatz: **Tschebyscheffsche Ungleichung**

Sei $X : (\Omega, A(\Omega), P) \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable mit existierendem Erwartungswert $E(X)$ und Varianz $Var(X)$.

Für $c > 0$ gilt:

$$P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{Var(X)}{c^2}$$

Konvergenz

Beweis der Tschebyscheffschen Ungleichung

Setze zu $\omega \in \Omega$:

$$Z(\omega) = \begin{cases} c^2 & |X(\omega) - E(X)| \geq c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$c > 0$:

$$\begin{aligned} Z(\omega) &\leq (X(\omega) - E(X))^2 \text{ für alle } \omega \in \Omega \\ \Rightarrow E(Z) &\leq E((X - E(X))^2) = Var(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Z) &= c^2 P(Z = c^2) + 0 \cdot P(Z = 0) \\ &= c^2 P(|X - E(X)| \geq c) \leq Var(X) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{Var(X)}{c^2}$$

Konvergenz

Anwendung der Tschebyscheffschen Ungleichung

Behauptung aus der deskriptiven Statistik:

$x_1, \ldots, x_n$ Urliste; $\bar{x}$ arithm. Mittel; s Standardabw.

- $\frac{3}{4}$ aller Werte liegen in $[\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s]$
- $\frac{8}{9}$ aller Werte liegen in $[\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s]$

Ω Grundgesamtheit (statistische Masse) vom Umfang $n : \Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$

$b : \Omega \to \mathbb{R}$ quantitatives Merkmal

$b(\omega_i) = x_i$ für $i = 1, \ldots, n$

x_i: Merkmalswert beim Merkmalsträger ω_i

Konvergenz

Anwendung der Tschebyscheffschen Ungleichung (Forts.)

Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum über Ω:

$(\Omega, A(\Omega), P)$ mit:

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n}; \quad b(\omega_i) = x_i; \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n} \text{ für } A \subset \Omega$$

$$\begin{aligned} E(b) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i = \bar{x} \\ Var(b) &= E((b - E(b))^2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} (x_i - \bar{x})^2 = s^2 \end{aligned}$$

Konvergenz

Anwendung der Tschebyscheffschen Ungleichung (Forts.)

Tschebyscheffsche Ungleichung

$$P(|b - E(b)| < c) \geq 1 - \frac{Var(b)}{c^2} = 1 - \frac{s^2}{c^2}$$

$$\begin{aligned} P(|b - E(b)| < c) &= P(|b - \bar{x}| < c) \\ &= \frac{1}{n} \#\{\omega || b(\omega) - \bar{x}| < c\} \\ &= \frac{1}{n} \#\{\omega | \bar{x} - c < b(\omega) < \bar{x} + c\} \\ &= \text{Anteil der Werte im Bereich } (\bar{x} - c, \bar{x} + c) \geq 1 - \frac{s^2}{c^2} \end{aligned}$$

Konvergenz

Anwendung der Tschebyscheffschen Ungleichung (Forts.)

$$\begin{aligned} c = 2s \quad &: \quad \text{Anteil der Werte im Bereich} \\ &\quad (\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) \geq 1 - \frac{s^2}{4s^2} = \frac{3}{4} \\ c = 3s \quad &: \quad \text{Anteil der Werte im Bereich} \\ &\quad (\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s) \geq 1 - \frac{s^2}{9s^2} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

Konvergenz - Beispiel

Weitere Anwendung der Tschebyscheffschen Ungleichung

Aufgabe 2.42* (Bamberg, G. "Statistik-Arbeitsbuch")

Aufgrund der technischen Gegebenheiten und der einschlägigen Vorschriften errechnet man für eine projektierte Ski-Seilbahn eine zulässige Zuladung von 12.900[kg] pro Gondel. Für die Umsetzung in eine zulässige Personenzahl gehe man davon aus, dass für das Personengewicht X und das Gewicht Y der Skiausrüstung gelte:

$$E(X) = 75, \quad Var(X) = 80, \quad E(Y) = 15, \quad Var(Y) = 4,$$

„Bruttogewicht" $\quad G = X + Y$

Die zulässige Personenzahl n muss die Eigenschaft haben, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Überschreitung der zulässigen Zuladung höchstens 1% beträgt.

Konvergenz - Beispiel

Aufgaben:

i) Bestimmen Sie n unter den Prämissen, dass X und Y unabhängig sind und das Gesamtgewicht der Skifahrer als normalverteilt angenommen werden kann.

ii) Bestimmen Sie n unter den Prämissen, dass X und Y unabhängig sind, anhand der Tschebyscheffschen Ungleichung.

iii) Wie ändern sich obige Ergebnisse, wenn man die Erfahrungstatsache, dass schwerere Personen i.a. auch eine schwerere Skiausrüstung benötigen, durch die Prämisse berücksichtigt, dass der Korrelationskoeffizient zwischen X und Y den Wert 0.9 besitzt ?

Konvergenz - Beispiel

Zulässige Zuladung pro Gondel: 12900 kg.

Aufgabe: Umsetzung in zulässige Personenzahl

X Personengewicht, Y Gewicht von Skiausrüstung

(X, Y) Zufallsvariable mit

$$\begin{aligned} E(X) &= 75 \qquad & Var(X) &= 80 \\ E(Y) &= 15 \qquad & Var(Y) &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= X + Y \qquad \text{“Bruttogewicht”} \\ E(G) &= E(X) + E(Y) = 90 \end{aligned}$$

Konvergenz - Beispiel

Gegeben:

- n Skifahrer
- G_i Bruttogewicht von Skifahrer(in) i
- $G_1, \ldots, G_n$ unabhängig, identisch verteilt wie G
- $G^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} G_i$ Gesamtgewicht

Gesucht: n maximal mit

$$P(G^{(n)} > 12900) \leq 0.01$$

Konvergenz - Beispiel

zu i)

X, Y unabhängig, normalverteilt $\Longrightarrow G = X + Y$ normalverteilt

$$\begin{aligned} Var(G) &= Var(X) + Var(Y) = 84 \\ E(G^{(n)}) &= 90n \\ Var(G^{(n)}) &= 84n \\ G^{(n)} & \quad \text{normalverteilt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(G^{(n)} > 12900) &= 1 - P(G^{(n)} \leq 12900) \\ &= 1 - P\left(\frac{G^{(n)} - 90n}{\sqrt{84n}} \leq \frac{12900 - 90n}{\sqrt{84n}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{12900 - 90n}{\sqrt{84n}}\right) \leq 0.01 \end{aligned}$$

Forderung:

$$\Phi\left(\frac{12900 - 90n}{\sqrt{84n}}\right) \geq 0.99$$

Konvergenz - Beispiel

Aus der Tabelle von Φ liest man ab:

$$\frac{12900 - 90n}{\sqrt{84n}} = \Phi^{-1}(0.99) = 2.326 \ ,$$

so dass man zur quadratischen Gleichung (für $\sqrt{n}$)

$$-90n - 2.326\sqrt{84}\sqrt{n} + 12900 = 0$$

kommt.

Die (positive) Lösung $\sqrt{n} = 11.85$ liefert $n = 140.42$ Unter den Prämissen von i) ist deshalb $n = 140$ die Höchstzahl der Personen pro Gondel.

Konvergenz - Beispiel

zu ii)

Aus der Gleichungs- bzw. Ungleichungskette

$$\begin{aligned} P(G^{(n)} > 12900) &= P(G^{(n)} - 90n > 12900 - 90n) \\ &\leq P(|G^{(n)} - 90n| \geq 12900 - 90n) \\ &\leq \frac{84n}{(12900 - 90n)^2} \\ &\leq 0.01 \end{aligned}$$

ergibt sich durch Gleichsetzen der beiden letzten Ausdrücke wiederum eine quadratische Gleichung.

Die relevante Lösung ist $n = 131.65$ und damit die Antwort $n = 131$. (Die rechnerisch zu ermittelnde zweite Lösung $n = 156$ ist irrelevant, da 90 n hierbei größer als 12900 ausfällt).

Konvergenz - Beispiel

zu iii)

Nun X und Y positiv korreliert mit $\varrho(X,Y) = 0.9 \Longrightarrow$ Varianz von G steigt an.

$$\begin{aligned} Var(G) &= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) \\ \varrho(X,Y) &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Cov(X,Y) &= \varrho(X,Y)\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)} \\ &= 0.9\sqrt{80}\sqrt{4} \end{aligned}$$

$$Var(G) = 80 + 4 + 2 \cdot 0.9 \cdot \sqrt{80} \cdot \sqrt{4} = 116.2$$

Konvergenz - Beispiel

Der Lösungsvorgang aus i) und ii) bleibt im Prinzip unverändert.

Die größere Varianz führt zu folgenden modifizierten (und wie zu erwarten war, kleineren) Lösungen:

- $n = 139$ unter Verwendung der Normalverteilung
- $n = 129$ unter Verwendung der Tschebyscheffschen Ungleichung

Konvergenz - Beispiel

Anmerkung zur Normalverteilungsannahme:

In der Realität: $G \geq 0$, d.h. $P(G < 0) = 0$

Bei Normalverteilungsannahme: $P(G < 0) > 0$

Daher: G normalverteilt eigentlich nicht korrekt

Aber: mit $E(G) = 90 \quad , \qquad Var(G) = 84$

$$\begin{aligned} P(G < 0) &= P\left(\frac{G-90}{\sqrt{84}} < \frac{-90}{\sqrt{84}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{-90}{\sqrt{84}}\right) = \Phi(-9.8) < 10^{-16} \end{aligned}$$

Konvergenz

Wiederholung:

Phänomene:

Nach vielen Wiederholungen gilt

- arithm. Mittel $\approx$ Erwartungswert
- relative Häufigkeit des Eintretens eines Ereignisses $\approx$ Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
- empirische Verteilungsfunktion $\approx$ theoretische Verteilungsfunktion

Fragestellung:

Wie kann Konvergenz mathematisch präzisiert werden?

Konvergenz

Definition: Punktweise Konvergenz

X_k, X_0 sind Funktionen:

$$X_k, X_0 : \Omega \to \mathbb{R}$$

Punktweise Konvergenz von Funktionen $\lim_{k\to\infty} X_k = X_0$ heißt:

Für jedes $\omega \in \Omega$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} X_k(\omega) = X_0(\omega)$$

Konvergenz

Definition: fast sichere Konvergenz

Abschwächung der punktweisen Konvergenz

$$\begin{array}{rl} X_1, X_2, \ldots & \text{Folge von Zufallsvariablen auf } (\Omega, A(\Omega), P) \\ X_0 & \text{Zufallsvariable auf } (\Omega, A(\Omega), P) \end{array}$$

Ist $\left\{\omega \in \Omega | \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X_0(\omega)\right\}$ Teilmenge in Ω eine Wahrscheinlichkeit derart zugeordnet

$$P\left(\{\omega \in \Omega | \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X_0(\omega)\}\right) = 1$$

so spricht man von "fast sicherer" Konvergenz der Folge $(X_n)_n$ gegen X_0.

Konvergenz

Anmerkung:

Im wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinn ist es ausreichend, dass diese Wahrscheinlichkeit 1 ist, da wir dann davon ausgehen, dass dieses Ereignis sicher ist. Also nicht notwendig für alle $\omega \in \Omega$.

Konvergenz

Definition: Stochastische Konvergenz

Weitere Abschwächung:

X_0 Zufallsvariable und $X_k, k = 1, 2, 3, \dots$ Folge von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum.

Man sagt:

Die Folge $(X_k)_k$ konvergiert stochastisch gegen X_0, wenn

$$\lim_{x \to \infty} P(|X_n - X_0| \geq \varepsilon) = 0 \ , \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

gilt. (Schreibweise: $X_0 = p \lim_{x \to \infty} X_k$)

Konvergenz

Implikationen bei der Konvergenz von Zufallsvariablen:

Man kann zeigen:

$$\begin{array}{lcl} \text{punktweise} & \Rightarrow & \text{fast sichere} \Rightarrow \text{stochastische} \\ \text{punktweise} & \not\Leftarrow & \text{fast sichere} \not\Leftarrow \text{stochastische} \end{array}$$

Konvergenz

Überprüfung der Phänomene:

zu a)

Arithmetisches Mittel der Beobachtungen $\approx$ Erwartungswert

Sei X Zufallsvariable und $Y_1, Y_2, \ldots$ Folge von unabhängigen Wiederholungen zu X mit:

$$\overline{Y}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \text{ arithmetisches Mittel nach } n \text{ Wiederholungen}$$

$$\begin{aligned} E(\overline{Y}^{(n)}) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) &&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Y_i) &&= E(X) \\ Var(\overline{Y}^{(n)}) &= Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) &&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(Y_i) &&= \frac{Var(X)}{n} \end{aligned}$$

Konvergenz

Satz:

"Schwaches Gesetz der großen Zahlen"

Aus der Tschebyscheffschen Ungleichung

$$P\left(|\overline{Y}^{(n)} - E(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{Var\left(\overline{Y}^{(n)}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{Var(X)}{n\varepsilon^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

folgt:

$$\overline{Y}^{(n)} \text{ konvergiert stochastisch gegen } E(X)$$

Schreibweise: $E(X) = p \lim\limits_{n\to\infty} \overline{Y}^{(n)}$

Konvergenz

zu b)

Relative Häufigkeit des Eintretens eines Ereignisses $\approx$ Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.

Betrachte wieder Ereignis A und zugehörige ZV $\mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

mit $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.

Sei $Y_1, Y_2, \ldots$ Folge unabhängiger Wiederholungen zu $\mathbb{1}_A$ und

$$\overline{Y}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

die relative Häufigkeit von A nach n Versuchen.

Konvergenz

Satz:

“Bernoullis Gesetz der großen Zahlen”

Nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen gilt

$$p \lim_{n \to \infty} \overline{Y}^{(n)} = E(\mathbb{1}_A) = P(A)$$

Konvergenz

Damit: Stochastische Konvergenz bedeutet nicht punktweise Konvergenz.

Beispiel: Wiederholtes Werfen eines Würfels

Elementarereignis bei unendlichfacher Wiederholung: Folge $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$ mit $\omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$

Relative Häufigkeit der Augenzahlen 1,2,3,4,5,6 nach n Versuchen:

$$(P^{(n)}(1), \ldots, P^{(n)}(6)) \overset{\text{stochastisch}}{\Longrightarrow} (\frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{6})$$

Aber: z.B. relative Häufigkeit von 1,2,3,4,5,6 nach n Versuchen bei der speziellen Folge $(4, 4, 4, \ldots, 4)$:

$$(P^{(n)}(1), \ldots, P^{(n)}(6)) = (0, 0, 0, 1, 0, 0) \neq (p_1, \ldots, p_6)$$

$\Rightarrow$ keine punktweise Konvergenz der relativen Häufigkeiten

Konvergenz

zu c)

empirische Verteilungsfunktion $\approx$ theoretische Verteilungsfunktion

Seien $X_1, \ldots, X_n$ Ergebnisse der ersten n Versuche (Realisationen von X)

Empirische Verteilungsfunktion:

$$F^{emp,n}(\alpha) = \frac{1}{n}\#\{i = 1, \ldots, n : x_i \leq \alpha\}$$

Versuchsergebnisse zufallsbehaftet $\Rightarrow$ emp. Verteilungsfunktion zufallsbehaftet

Konvergenz

Sei A das Ereignis "$X \leq t$", dann gilt

$$P(A) = P(X \leq t) = F_X(t).$$

$F_X^{emp,n}(t)$: relative Häufigkeit des Eintretens von A bei n Versuchen.

Also nach Bernoullis Gesetz der großen Zahlen:

$$F_X^{emp,n}(t) \approx P(A) = F_X(t)$$

Konvergenz

Genauer:

Mit $Y_i((\omega_j)_{j=1,2,3\ldots}) = \mathbb{1}_A(\omega_i)$, also

$$Y_i((\omega_j)_{j=1,2,3\ldots}) = \begin{cases} 1 & A \text{ tritt beim } i-\text{ten Versuch ein} \\ 0 & A \text{ tritt nicht ein} \end{cases}$$

gilt nach Bernoullis Gesetz der großen Zahlen:

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i - P(A) \right| < \varepsilon \right) = 1$$

Konvergenz

Dabei ist

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - P(A)\right| < \varepsilon\right)$$

$$= \quad P^{\mathbb{N}}\left(|F_X^{emp,n}(t) - F_X(t)| < \varepsilon\right)$$

mit $P^{\mathbb{N}}$ Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Menge $\Omega^{\mathbb{N}}$ der Folgen $(\omega_i)_{i=1,2,\ldots}$.

Konvergenz

Eine Verschärfung ist der **Hauptsatz der Statistik**

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)}\left(\sup_t |F_X^{emp,n}(t) - F(t)| < \varepsilon\right) = 1$$

Konvergenz

Eine Anwendung des Hauptsatzes der Statistik:

Anpassungstest nach Kolmogoroff-Smirnow

Hypothese: Es liegt eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung mit einer Verteilungsfunktion F vor

Test: Abweichung von empirischer Verteilungsfunktion bei n Versuchen größer als eine Testschranke

$\Rightarrow$ Ablehnung der Hypothese

Grenzwertsätze

weiteres Phänomen:

m Versuchsreihen mit jeweils n Versuchen
n Messwerte bei jeder Versuchsreihe

Auswertung jeder Versuchsreihe durch

arithmetisches Mittel

Beobachtet wird: Histogramm der arithmetischen Mittel bei vielen Versuchsreihen (und großem n)

$\approx$ Dichtefunktion einer Normalverteilung

Grenzwertsätze

Beispiel: Sei $m = n = 1000$, $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ aus der Stichprobe.

Berechnung der m arithmetischen Mittel $X_i, i = 1, \ldots, m$.

Gruppierung der X_i in ca. 70 Klassen (werteabhängig).

Berechnung des Gesamtmittels:

$$\overline{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i$$

und der mittleren quadratischen Abweichung

$$V = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (x_i - \overline{x})^2.$$

Grenzwertsätze

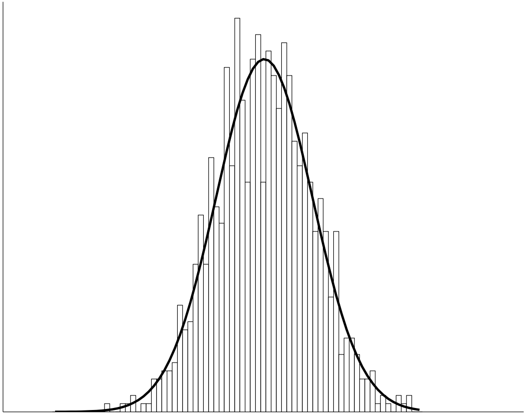

Abbildung: Histogramm der Stichprobenmittel $\overline{X_i}$ im Vergleich zur Dichte von $N(\overline{X}, V)$

Grenzwertsätze

Betrachtung einer Versuchsreihe

Ausgangspunkt: X_i ZV des i-ten Versuchs, $i = 1, \ldots, n$.

Angenommen X_i normalverteilt mit μ_i und σ_i, also $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $N(\mu_i, \sigma_i^2)$- verteilt. $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ ist $N(\mu, \sigma^2)$- verteilt mit

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \quad , \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \Rightarrow \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2}} \quad N(0,1)\text{-verteilt.}$$

Grenzwertsätze

Vorbemerkung: Lindeberg-Bedingung

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mu_i = E(X_i)$ und $\sigma_i^2 = Var(X_i) < \infty,\ i = 1, 2, \ldots$.

Für $S_n := x_1 + \ldots + x_n$ und $\sigma_{(n)}^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$ gilt die Lindeberg-Bedingung gilt als erfüllt, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_{(n)}^2} \sum_{k=1}^{n} E\left((X_k - \mu_k)^2 \cdot 1_{\{|X_k - \mu_k| > \epsilon\sigma_{(n)}\}}(X_k) \right) = 0$$

für alle $\epsilon > 0$.

Grenzwertsätze

Satz: Seien $X_1, X_2 \ldots$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit existierenden Erwartungswerten μ_i und Varianzen σ_i^2 (*ohne die Voraussetzung der Normalverteilung*)

Erfüllt diese Folge von Zufallsvariablen die Lindeberg-Bedingung, so konvergiert die Verteilungsfunktion von

$$Z_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2}}$$

gleichmäßig gegen die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$$\lim_{n \to \infty} F_{Z_n}(t) = \Phi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$$

Grenzwertsätze

Spezialfall dieses Satzes: **Zentraler Grenzwertsatz**

Lindeberg-Bedingung ist erfüllt, wenn $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig identischverteilt mit Erwartungswert μ_0 und Varianz σ_0^2.

Dann ist zu gegebenem n

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu_0}{\sqrt{n}\sigma_0} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}$$

und

$$\lim_{n \to \infty} F_{Z_n}(t) = \Phi(t).$$

D.h. das arithmetische Mittel ist näherungsweise normalverteilt mit μ_0 und $\frac{\sigma^2}{n}$.

Grenzwertsätze

Anwendungen:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad X_1, \ldots, X_n \quad \text{unabhängig}$$

$\Rightarrow \quad Y$ näherungsweise normalverteilt.

Begründung dafür, bei Anwendungen in der Praxis bei Beobachtungen einer Zufallsvariable von einer normalverteilten Zufallsvariablen auszugehen:

Messwert wird beeinflusst von vielen unabhängigen Faktoren, z.B. Messfehler, Luftfeuchtigkeit, Temperatur, Erschütterungen, Spannungsschwankungen, ...

$\Rightarrow$ *Abweichungen von einem mittleren Wert ist Summe vieler zufälliger Größen*

$\Rightarrow$ *Abweichung unterliegt zumindest näherungsweise einer Normalverteilung*

Grenzwertsätze - Anwendungen

Anwendungen:

1.) <u>Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung</u>

Binomialverteilung $B(n, p)$ mit
Erwartungswert : np
Varianz $np(1-p)$

Sei Y $B(n, p)$-verteilt, dann $Y = X_1 + \ldots + X_n$ mit X_i unabhängig und Bernoulliverteilt mit Parameter p.

Zentraler Grenzwertsatz:

n groß $\Rightarrow$ Y näherungsweise, $(np, np(1-p))$- verteilt.

Grenzwertsätze - Anwendungen

Gesucht: $P(Y \leq y)$

$$P(Y \leq y) = P\left(\frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{y - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{y - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist

$$\frac{Y - np}{\sqrt{np \cdot (1-p)}} = \frac{\sum X_i - np}{\sqrt{np \cdot (1-p)}}$$

näherungsweise standardnormalverteilt, d.h.

$$P\left(\frac{Y - np}{\sqrt{np \cdot (1-p)}} \leq x\right) \approx \Phi(x)$$

Grenzwertsätze - Anwendungen

bzw. mit $x = \frac{y-np}{\sqrt{np\cdot(1-p)}}$ gilt:

$$\frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{y - np}{\sqrt{np(1-p)}} \Longleftrightarrow Y \leq y$$

Daher

$$P(Y \leq y) \approx \Phi\left(\frac{y - np}{\sqrt{np \cdot (1-p)}}\right) \quad \text{für alle} \;\; y \in \mathbb{R} \quad \circledast$$

Grenzwertsätze - Anwendungen

Y diskret mit Werten $0, 1, 2, 3, \dots, n$

$\Rightarrow y = k$ mit $k = 0, 1, 2, \dots, n$

linke Seite von $\circledast$ ändert sich nur bei ganzzahligem $y \quad (= k)$

Bessere Annäherung:

$$\sum_{m=0}^{k} P(Y = m) = P(Y \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np \cdot (1 - p)}}\right)$$

$\frac{1}{2}$ ist Stetigkeitskorrektur.

Grenzwertsätze - Anwendungen

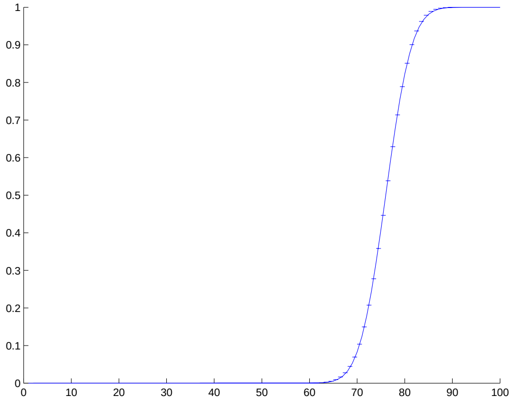

Abbildung: $P(Y \leq k) = \sum_{m=0}^{k} P(Y = m)$ kumulierte Binomialverteilung für n=100

Grenzwertsätze - Anwendungen

2.) Erzeugung von Zufallszahlen zur Normalverteilung

Tabellen von Zufallszahlen und computererzeugte Zufallszahlen sind Zufallszahlen zur Gleichverteilung auf $[0, 1]$

Erwartungswert: $\frac{1}{2}$

Varianz: $\frac{1}{12}$

Grenzwertsätze - Anwendungen

X_i unabhängig, identisch gleichverteilt auf $[0, 1]$

$\sum_{i=1}^{12} X_i(-6)$ hat Erwartungswert 6(0) und Varianz 1 und ist näherungsweise normalverteilt.

Je 12 Zufallszahlen zur Gleichverteilung auf [0,1] werden addiert und von der Summe die Zahl 6 abgezogen.

Grenzwertsätze - Anwendungen

Daraus:

Zufallszahlen zur Normalverteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2:

$$z : \quad \text{Zufallszahl zu } N(0,1)$$

dann $\quad \mu + \sigma z \quad$ Zufallszahl zu $N(\mu, \sigma^2)$.