Nun können wir Teil (b) der Aufgabe mit denselben Überlegungen lösen wie Teil (a).

Zunächst bestimmen wir die Sitzordnungen, bei denen C und D unmittelbar nebeneinander sitzen. Dazu fassen wir C,D wiederum als eine Person auf und erhalten (7 Personen an einem runden Tisch) $2\cdot 6!$ Anordnungen. Hiervon müssen wir alle diejenigen Anordnungen subtrahieren, bei denen sowohl C,D als auch A,B jeweils nebeneinander sitzen. Wir fassen A,B nun auch als eine Person auf und erhalten (6 Personen an einem runden Tisch) $2\cdot 2\cdot 5!$ Anordnungen, also insgesamt $2\cdot 6!-4\cdot 5! = 8\cdot 5!$ Sitzordnungen der verlangten Art. Da es $7!$ mögliche Sitzordnungen von 8 Personen an einem runden Tisch gibt, erhalten wir für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$p = \frac{8\cdot 5!}{7!} = \frac{8\cdot 5!}{5!\,6\cdot 7} = \frac{4}{21}$$

6 Aus 3 Ehepaaren werden zufällig 3 Personen ausgewählt. Man berechne die Wahrscheinlichkeit p, daß sich unter diesen 3 Personen

(a) mindestens 2 Männer,
(b) höchstens 2 Männer,
(c) ein Ehepaar und ein weiterer Mann befinden.

<u>Lösung:</u>

Es gibt $\binom{6}{3}$ verschiedene Möglichkeiten, 3 Personen aus 6 auszuwählen.

(a) p = P("2 Männer bei 3 ausgewählten Personen")
+ P("3 Männer bei 3 ausgewählten Personen")

$$= \frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{6}{3}} + \frac{\binom{3}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{9+1}{5\cdot 4} = \frac{1}{2}$$

(b) p = P("kein Mann bei 3 ausgewählten Personen")
+ P("1 Mann bei 3 ausgewählten Personen")
+ P("2 Männer bei 3 ausgewählten Personen")

$$= \frac{\binom{3}{3}}{\binom{6}{3}} + \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{6}{3}} + \frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{1+9+9}{20} = \frac{19}{20}$$

(c) $$p = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{10}$$

Zunächst wählt man eine Frau aus den dreien aus; dies kann auf $\binom{3}{1} = 3$ verschiedene Arten erfolgen. Durch diese Wahl ist die zweite Person, der Ehemann, bestimmt. Die dritte Person, ein weiterer Mann, wird auf $\binom{2}{1} = 2$ Arten aus den verbleibenden 2 Männern ausgewählt.

7 Ein Kartenspiel, bestehend aus 32 Karten, enthält 4 Asse. Aus dem Spiel werden zufällig 2 Karten gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich unter den zwei Karten

(a) genau ein As,
(b) kein As,
(c) wenigstens ein As,
(d) Herz-As und ein weiteres As befindet?

Lösung:

Es gibt $\binom{32}{2}$ verschiedene Möglichkeiten, 2 Karten aus 32 auszuwählen.

(a) $P(\text{"genau ein As"}) = \dfrac{\binom{4}{1}\cdot\binom{28}{1}}{\binom{32}{2}} = \dfrac{4\cdot 28}{\frac{32\cdot 31}{2}} = \dfrac{7}{31}$

"ein As wird aus den 4 Assen ausgewählt, eine weitere Karte wird aus den 28 anderen Karten gezogen."

(b) $P(\text{"kein As"}) = \dfrac{\binom{4}{0}\cdot\binom{28}{2}}{\binom{32}{2}} = \dfrac{28\cdot 27}{32\cdot 31} = \dfrac{7\cdot 27}{8\cdot 31} = \dfrac{189}{248}$

(c) P("wenigstens ein As") = P("genau ein As") + P("genau zwei Asse") =

$$= \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{28}{1}}{\binom{32}{2}} + \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{28}{0}}{\binom{32}{2}} = \frac{4\cdot 28+6}{16\cdot 31} = \frac{118}{496} = \frac{59}{248}$$

(d) $P(\text{"Herz-As und ein weiteres As"}) = \dfrac{1\cdot\binom{3}{1}}{\binom{32}{2}} = \dfrac{3}{31\cdot 16} = \dfrac{3}{496}$

andere Lösungsmöglichkeit:

Die Ereignisse "wenigstens ein As unter zwei Karten" und "kein As unter zwei Karten" sind komplementär, d.h. P("wenigstens ein As") = 1-P("kein As") = $1-\frac{189}{248} = \frac{59}{248}$.

Lösung:

(a) Es gibt 16! verschiedene Möglichkeiten, die 16 Mannschaften anzuordnen

○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○ | ○ ○ ○ ○

Da in jeder Gruppe die Anordnung nicht zählt, müssen wir noch durch 4! pro Gruppe teilen. Wir erhalten demnach $\frac{16!}{4!4!4!4!} = 63.063.000$ mögliche Anordnungen. (Hinweis: die Verschiedenheit der Gruppen wird automatisch berücksichtigt.)

(b) Es werden A,B,C,D gesetzt. Diese 4 Mannschaften können wir auf 4! verschiedene Arten auf die 4 Gruppen aufteilen. Für die restlichen 12 Mannschaften ergeben sich, ähnlich wie unter (a), $\frac{12!}{3!3!3!3!}$ verschiedene Aufteilungen. Insgesamt erhalten wir somit $\frac{12!4!}{3!3!3!3!} = 8.870.400$ verschiedene Gruppeneinteilungen.

(c) Die 4 Mannschaften einer Kategorie lassen sich auf 4! verschiedene Arten auf die 4 Gruppen aufteilen. Insgesamt erhalten wir somit 4!4!4!4! = 331.776 verschiedene Gruppeneinteilungen.

17 12 Schüler, 9 Jungen und 3 Mädchen, werden zufällig auf 3 Klassen aufgeteilt (pro Klasse 4 Schüler).
Man berechne die Wahrscheinlichkeit, daß

(a) in jede Klasse ein Mädchen kommt,

(b) alle Mädchen in ein und dieselbe Klasse kommen.

Lösung:

Es gibt $\frac{12!}{4!4!4!}$ mögliche Aufteilungen.

(a) Die 3 Mädchen können auf 3! verschiedene Arten auf die 3 Klassen verteilt werden. Die restlichen 9 Schüler werden auf $\frac{9!}{3!3!3!}$ verschiedene Arten den 3 Klassen zugeteilt. Insgesamt haben wir

$\frac{3!9!}{3!3!3!} = \frac{9!}{3!3!}$ günstige Aufteilungen, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich somit zu:

$$p = \frac{9!4!4!4!}{3!3!12!} = \frac{4\cdot4\cdot24}{10\cdot11\cdot12} = \frac{16}{55}$$

(b) Es gibt 3 Möglichkeiten, die 3 Mädchen ein und derselben Klasse zuzuteilen. Die restlichen 9 Schüler werden auf $\frac{9!}{4!4!1!}$ verschiedene Arten den 3 Klassen zugewiesen. Insgesamt haben wir somit

$\frac{3\cdot9!}{4!4!}$ günstige Aufteilungen, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich zu:

$$p = \frac{3\cdot9!4!4!4!}{4!4!12!} = \frac{3\cdot9!\cdot4!}{12!} = \frac{3\cdot24}{10\cdot11\cdot12} = \frac{3}{55}$$