Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Statistik und Mathematische Wirtschaftstheorie

Wahrscheinlichkeitstheorie

Kapitel X - Randverteilung, bedingte Verteilung und Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Markus Höchstötter

Lehrstuhl für Statistik, Ökonometrie und Mathematische Finanzwirtschaft,
Universität Karlsruhe (TH)

Karlsruhe, SS 2008

10. Randverteilung, bedingte Verteilung und Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Gegeben: k- dimensionale Zufallsvariable X mit W - Verteilung z.B. in Form der Verteilungsfunktion

$$F(\alpha_1, \ldots \alpha_k).$$

Beispiele:

- Gemeinsame Verteilung von Dollar/Euro Wechselkurs und Exportvolumen in die USA
- Gemeinsame Verteilung der Kurse der im DAX enthaltenen Aktien
- Gemeinsame Verteilung von Sonnenstunden/Monat und Umsatz an Sonnenschutzmittel

⋮

-

Mögliche Fragestellung:

a) Wie ist die Verteilung der Zufallsvariablen separat betrachtet ?
b) Beeinflusst ein fixierter Wert bei einer der Komponenten die (gemeinsame) Verteilung der übrigen $k-1$ Werte ?
c) Gibt es einen wahrscheinlichtheoretischen Zusammenhang zwischen den Zufallsvariablen ?

Gegeben: ZV $X = (X_1, \cdots, X_k)$
Die Verteilung einer Komponente X_{i^*} heißt Randverteilung von X_{i^*}.
Verteilungsfunktion einer Komponente X_{i^*}

$$
\begin{aligned}
F_{X_{i^*}} &= P(X_{i^*} \le \alpha) \\
&= P(X_{i^*} \le \alpha, X_i \text{ beliebig für } i \ne i^*) \\
&= P(X_{i^*} \le \alpha, X_i \le \infty \text{ für } i \ne i^*) \\
&= \lim_{\alpha_i \to \infty} F(\alpha_1, \cdots, \alpha, \cdots \alpha_k) \text{ für } i \ne i^*
\end{aligned}
$$

$F_{X_{i^*}}$ ist die Verteilungsfunktion von X_{i^*}

Beispiel - gemeinsame und Randverteilungen

Gegeben sei die bivariate Dichte

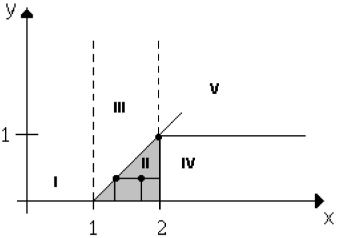
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}x, & 1 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le x-1 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Dann folgt für die Verteilung von Y

$$\begin{aligned} F_Y(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_{0}^{\alpha}\int_{y+1}^{2} \frac{6}{5}xdxdy = \int_{0}^{\alpha}\left[\frac{6}{5}\frac{x^2}{2}\right]_{y+1}^{2} dy \\ &= \frac{3}{5}\int_{0}^{\alpha}\left(4-(y+1)^2\right) dy = \frac{3}{5}\alpha\left(-\frac{\alpha^2}{3}-\alpha+3\right) \overset{\alpha=1}{=} ? \end{aligned}$$

Für die gemeinsame Verteilung von X und Y an den Stellen α_1 bzw. α_2 gilt dann

$$
\begin{aligned}
F(\alpha_1, \alpha_2) &= \int\limits_0^{\alpha_2} \int\limits_{y+1}^{\alpha_1} \frac{5x}{6} dx dy = \int\limits_0^{\alpha_2} (\alpha_1^2 - y^2 - 2y - 1) dy \\
&= \frac{3}{5} \left[\alpha_1^2 y - \frac{1}{3} y^3 - y^2 - y \right]_0^{\alpha_2} \\
&= \frac{3}{5} \left[\alpha_1^2 \alpha_2 - \frac{1}{3} \alpha_2^3 - \alpha_2^2 - \alpha_2 \right]
\end{aligned}
$$



Integration, falls $(\alpha_1, \alpha_2) \notin I$

Beispiel:

Gesucht: Randverteilungen Für X, $\quad 1 \leq \alpha_1 \leq 2$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\alpha_2 \to \infty} F(\alpha_1, \alpha_2) &= F(\alpha_1, \alpha_1 - 1) \\
&= \frac{3}{5}(\alpha_1)^2(\alpha_1 - 1) - \frac{1}{5}(\alpha_1 - 1)^3 - \frac{3}{5}(\alpha_1 - 1)^2 - \frac{3}{5}(\alpha_1 \\
&= \frac{2}{5}(\alpha_1)^3 - \frac{3}{5}(\alpha_1)^2 + \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

$$
F_X(\alpha) = \begin{cases} 0 & \alpha < 1 \\ \frac{2}{5}(\alpha)^3 - \frac{3}{5}(\alpha)^2 + \frac{1}{5} & 1 \leq \alpha \leq 2 \\ 1 & \alpha > 2 \end{cases}
$$

Für $Y : 0 \leq \alpha_2 \leq 1$

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha_1 \to \infty} F(\alpha_1, \alpha_2) &= F(2, \alpha_2) \\
&= \frac{3}{5} 4\alpha_2 - \frac{1}{5}(\alpha_2)^3 + \frac{3}{5}(\alpha_2)^2 - \frac{3}{5}\alpha_2 \\
&= \frac{9}{5}\alpha_2 - \frac{3}{5}(\alpha_2)^2 - \frac{1}{5}(\alpha_2)^3
\end{aligned}$$

$$F_Y(\alpha) = \begin{cases} 0 & \alpha < 0 \\ \frac{9}{5}\alpha - \frac{3}{5}(\alpha)^2 + \frac{1}{5}(\alpha)^3 & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ 1 & \alpha > 1 \end{cases}$$

X diskret

X diskret mit Werten x, $\quad j \in I$
W - Verteilung von Komponente $X_{i^*} : x \in \mathbb{R}$

$P(X_{i^*} = x) = P(X_{i^*} = x, \;\; X_i \quad \text{beliebig für} \quad i \neq i^*)$
Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_{i^*} erhält man indem man den Wert von X_{i^*} festhält und über alle Werte der übrigen Komponenten aufsummiert.

Also:

Suche alle Werte x^j mit $x^j_{i^*} = x$ (Komponente i^* von x^j ist x).
Dann

$$P(X_{i^*} = x) = \sum_{x^j \text{ mit } x^j_{i^*} = x} P(X = x^j)$$

Beispiel: *Drei Qualitätsmerkmale* (Beispiel 10.2)
Bei einem Bauteil werden drei Qualitätsmerkmale überprüft:

1. Oberflächengüte (X_1)
2. Bruchfestigkeit (X_2)
3. Masstreue (X_3)

Bei allen drei Merkmalen wird eine Einstufung in die Ausprägung gut/schlecht mit den Codierungen 0 (gut) und 1 (schlecht) vorgenommen. Dementsprechend gibt es 8 verschiedene Kombinationsmöglichkeiten.

	(x_1, x_2, x_3)	$P((X_1, X_2, X_3) = (x_1, x_2, x_3))$
x^1	(0,0,0)	0.85
x^2	(0,0,1)	0.01
x^3	(0,1,0)	0.02
x^4	(0,1,1)	0.02
x^5	(1,0,0)	0.03
x^6	(1,0,1)	0.01
x^7	(1,1,0)	0.04
x^8	(1,1,1)	0.02

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3

Aufgabe:

Bestimmung der Randverteilung von X_1: $P(X_1 = 1) = ?$

	(x_1, x_2, x_3)	$P((X_1, X_2, X_3) = (x_1, x_2, x_3))$
x^1	(0,0,0)	0.85
x^2	(0,0,1)	0.01
x^3	(0,1,0)	0.02
x^4	(0,1,1)	0.02
x^5	(1,0,0)	0.03
x^6	(1,0,1)	0.01
x^7	(1,1,0)	0.04
x^8	(1,1,1)	0.02

Werte: $\underbrace{(1, 0, 0)}_{x^5} \underbrace{(1, 0, 1)}_{x^6} \underbrace{(1, 1, 0)}_{x^7} \underbrace{(1, 1, 1)}_{x^8}$

$$P(X_1 = 1) = \sum_{j=5}^{8} P(X = x^j) = 0.03 + 0.01 + 0.04 + 0.02 = 0.1$$

$\Rightarrow P(X_1 = 0) = 0.9$

Aufgabe:

Bestimmung der Randverteilung von X_2: $P(X_2 = 1) =?$

	(x_1, x_2, x_3)	$P((X_1, X_2, X_3) = (x_1, x_2, x_3))$
x^1	(0,0,0)	0.85
x^2	(0,0,1)	0.01
x^3	(0,1,0)	0.02
x^4	(0,1,1)	0.02
x^5	(1,0,0)	0.03
x^6	(1,0,1)	0.01
x^7	(1,1,0)	0.04
x^8	(1,1,1)	0.02

Werte: $\underbrace{(0, 1, 0)}_{x^3} \underbrace{(0, 1, 1)}_{x^4} \underbrace{(1, 1, 0)}_{x^7} \underbrace{(1, 1, 1)}_{x^8}$

$$\sum_{j=3,4,7,8} P(X = x^j) = 0,1$$

$$\Rightarrow P(X_2 = 0) = 0.9$$

Aufgabe:

Bestimmung der Randverteilung von X_3: $P(X_3 = 1) =?$

	(x_1, x_2, x_3)	$P((X_1, X_2, X_3) = (x_1, x_2, x_3))$
x^1	(0,0,0)	0.85
x^2	(0,0,1)	0.01
x^3	(0,1,0)	0.02
x^4	(0,1,1)	0.02
x^5	(1,0,0)	0.03
x^6	(1,0,1)	0.01
x^7	(1,1,0)	0.04
x^8	(1,1,1)	0.02

Werte: $x^2 = (0, 0, 1)$, $x^4 = (0, 1, 1)$, $x^6 = (1, 0, 1)$, $x^8 = (1, 1, 1)$

$$P(X_3 = 1) = \sum_{j=2,4,6,8} P(X = x^j) = 0,06$$

$$P(X_3 = 0) = 0,94$$

Verteilungsfunktion:

Damit:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 0 & x_1 < 0 \ \text{ oder } & x_2 < 0 \ \text{ oder } & x_3 < 0 \\ 0.85 & 0 \leq x_1 < 1, & 0 \leq x_2 < 1, & 0 \leq x_3 < 1 \\ 0.86 & 0 \leq x_1 < 1, & 0 \leq x_2 < 1, & 1 \leq x_3 \\ 0.87 & 0 \leq x_1 < 1, & 1 \leq x_2, & 0 \leq x_3 < 1 \\ 0.88 & 1 \leq x_1, & 0 \leq x_2 < 1, & 0 \leq x_3 < 1 \\ 0.9 & 0 \leq x_1 < 1, & 1 \leq x_2, & 1 \leq x_3 \\ 0.9 & 1 \leq x_1, & 0 \leq x_2 < 1, & 1 \leq x_3 \\ 0.94 & 1 \leq x_1, & 1 \leq x_2, & 0 \leq x_3 < 1 \\ 1 & 1 \leq x_1, & 1 \leq x_2, & 1 \leq x_3 \end{cases}$$

Alternative Berechnung der Randverteilung von X_1:

$$F_{X_1}(x_1) = \lim_{x_2, x_3 \to \infty} F_x(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 0 & x_1 < 0 \\ 0.9 & 0 \leq x_1 < 1 \\ 1 & 1 \leq x_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow P(X_1 = 0) = 0.9$;

$P(X_1 = 1) = 0.1$

X stetig

X **stetig:**
mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F_X :

$$F_{X_{i^*}}(\alpha) = \lim_{x_i \to \infty} F_X(x_1, \cdots, \alpha, \cdots, x_k), \quad i \neq i^*$$

Es gilt

$$F_X(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) = \int_{-\infty}^{\alpha_k} \cdots \int_{-\infty}^{\alpha_1} f(x_1, \cdots, x_k) dx_1 \cdots dx_k$$

X stetig

Damit ist

$$
\begin{aligned}
F_{X_{i^*}}(\alpha) &= \lim_{\substack{\alpha_i \to \infty \\ \text{für } i \neq i^*}} F_X(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots \alpha_k) \\
&= \lim_{\substack{\alpha_i \to \infty \\ i \neq i^*}} \int_{-\infty}^{\alpha_k} \cdots \int_{-\infty}^{\alpha} \cdots \int_{-\infty}^{\alpha_1} f(x_1, \cdots, x_k) dx_1 \cdots dx_k dx_{i^*}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow F_{X_{i^*}}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \cdots, x, \cdots x_k) \underbrace{dx_1 \cdots dx_k}_{\neq dx_i}
$$

1. **Beispiel** - zweidimensionale stetige ZV

Sei
$F(x_1, x_2) =$

$$\begin{cases} 1 + \exp^{-\lambda_1 x_1} \exp^{-\lambda_2 x_2} - \exp^{-\lambda_1 x_1} - \exp^{-\lambda_2 x_2}, & x_1, x_2 > 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

die gemeinsame Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen $X = (X_1, X_2)$.

Dann gilt für $\alpha > 0$

$$
\begin{aligned}
F_{X_1}(\alpha) &= P(X_1 \leq \alpha) = \lim_{x_2 \to \infty} F(\alpha, x_2) \\
&= \lim_{x_2 \to \infty} (1 + \exp^{-\lambda_1 \alpha} \exp^{-\lambda_2 x_2} - \exp^{-\lambda_1 \alpha} - \exp^{-\lambda_2 x_2}) \\
&= 1 - \exp^{-\lambda_1 \alpha} \\
(&= 0 \quad \text{für } \alpha \leq= 0)
\end{aligned}
$$

Die Randverteilung ist also eine Exponentialverteilung.

2. **Beispiel** - zweidimensionale stetige ZV

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}x & 1 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le x-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dichte von X_1: $\quad 1 \le x \le 2$

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy &= \int_{0}^{x-1} \frac{6}{5}xdy = \left[\frac{6}{5}xy\right]_0^{x-1} \\ &= \frac{6}{5}x^2 - \frac{6}{5}x \end{aligned}$$

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}x^2 - \frac{6}{5}x & 1 < x \le 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dichte von X_2: $0 \le y \le 1$

$$
\begin{aligned}
f_{X_2}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx &= \int_{y+1}^{2} \frac{6}{5} x dx = \left[\frac{3}{5}x^2\right]_{y-1}^{2} \\
&= \frac{12}{5} - \frac{3}{5}y^2 - \frac{6}{5}y - \frac{3}{5} \\
&= \frac{9}{5} - \frac{3}{5}y^2 - \frac{6}{5}y
\end{aligned}
$$

$$
f_{X_2}(y) = \begin{cases} \frac{9}{5} - \frac{6}{5}y - \frac{3}{5}y^2 & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
$$

Frage: Wie beeinflusst ein fixierter Wert x bei einer Komponente die Verteilung der restlichen Komponenten ? **Zunächst:** Zweidimensionale ZV (X, Y) diskret betrachtet

$$x \text{ fixierter Wert bei } X \text{ Ereignis } A: \text{``}X = x''$$
$$y_j \text{ beliebiger Wert von } Y \text{ Ereignis } \text{``}B_j : Y = y_j''$$

Frage: Gibt es einen Einfluss von A auf B ?

Antwort: Die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(B_j|A) = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)} = \frac{P(X = x, Y = y_j)}{P(X = x)} = P(Y = y_j|X = x)$$

wird verglichen mit $P(Y = y_j)$

$P(Y = y_j|X = x)$ heißt bedingte Verteilung von Y unter der Bedingung "$X = x$"

Frage: Gibt es einen Einfluss von A auf B ?

Kein Einfluss, wenn

$$P(Y = y_j | X = x) = P(Y = y_j)$$

bzw.

$$\frac{P(Y = y_j, X = x)}{P(X = x)} = P(Y = y_j)$$

bzw.

$$P(Y = y_j, X = x) = P(Y = y_j)P(X = x)$$

(Unabhängigkeit der Ereignisse "$X = x$" und "$Y = y_j$")

Definition: (X, Y) diskret

X und Y heißen unabhängig, wenn

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

für alle Werte x von X und alle Werte y von Y gilt.

Unabhängigkeit von X und Y bedeutet also Unabhängigkeit von "$X = x$" und "$Y = y$" für alle Werte x und y.

Beispiel: *Drei Qualitätsmerkmale*

Frage: Hängt die Qualität der beiden Merkmale “Oberflächengüte” und “Bruchfestigkeit” zusammen ?

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Bruchfestigkeit :

$$\begin{aligned}
P((X_1, X_2) = (0,0)) &= P((X_1, X_2, X_3) \\
&= (0,0,x_3), x_3 \text{ beliebig }) \\
&= P((X_1, X_2, X_3) \\
&= (0,0,0)) + P((X_1, X_2, X_3) = (0,0,1)) \\
&= 0.85 + 0.01 = 0.86
\end{aligned}$$

Analog für $(0,1), (1,0), (1,1)$

Bruchfestigkeit (X_2) / Oberflächengüte (X_1)	gut	schlecht	$\sum$
gut	0.86	0.04	0.90
schlecht	0.04	0.06	0.10
$\sum$ Randverteilung von X_2	0.90	0.10	1

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteiung

Bedingte Wahrscheinlichkeit der Bruchfestigkeit (X_2) unter der Bedingung “schlecht bei Oberflächengüte ($X_1 = 1$)”

$$
\begin{aligned}
P(X_2 = 0|X_1 = 1) = \quad & \tfrac{P(X_2=0, X_1=1)}{P(X_1=1)} = \quad \tfrac{0.04}{0.10} = \quad 0.4 \\
P(X_2 = 1|X_1 = 1) = \quad & \tfrac{P(X_2=1, X_1=1)}{P(X_1=1)} = \quad \tfrac{0.06}{0.10} = \quad 0.6
\end{aligned}
$$

Wir haben:

$P(X_2 = 0) = 0.9 \neq P(X_2 = 0|X_1 = 1) = 0.4$
$P(X_2 = 1) = 0.1 \neq P(X_2 = 1|X_1 = 1) = 0.6$
$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = 0.86 \neq P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = 0.9 \cdot 0.9 = 0.81$

Folgerung: Keine Unabhängigkeit
Vermutlich gemeinsame Ursache, z.B. Materialfehler.

(X, Y) stetig

Problem: Bei einer stetigen Zufallsvariable X gilt für jede reelle Zahl x

$$P(X = x) = 0$$

Folgerung: Die bedingte Verteilung unter der Bedingung $X = x$ kann nicht direkt gebildet werden.
Statt x betrachten wir das Intervall $[x, x + \epsilon]$

$$A_\epsilon = \text{“}X \in [x, x + \epsilon]'' = \{\omega \in \Omega | x \leq X(\omega) \leq x + \epsilon\}$$

A_ϵ verwenden wir als Bedingung unter der Voraussetzung:

$$P(A_\epsilon) = P(X \leq X \leq x + \epsilon) \neq 0$$

Bedingte W-verteilung von Y unter der Bedingung A_ϵ :

Gehen wir von der Verteilungsfunktion aus, so betrachtet man $Y \leq y$ unter der Bedingung A_ϵ :

$$\begin{aligned}
F_{Y|A_\epsilon}(y) &= P(Y \leq y | x \leq X \leq x+\epsilon) = \frac{P(Y \leq y, x \leq X \leq x+\epsilon)}{P(x \leq X \leq x+\epsilon)} \\
&= \frac{P(X \leq x+\epsilon, Y \leq y) - P(X \leq x, Y \leq y)}{F_X(x+\epsilon) - F_X(X)} \\
&= \frac{\frac{1}{\epsilon}(F_{(X,Y)}(x+\epsilon, y) - F_{(X,Y)}(x,y))}{\frac{1}{\epsilon}(F_X(x+\epsilon) - F_X(x))}
\end{aligned}$$

hängt von ϵ ab.

$\epsilon \longrightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} F_{Y|A_\epsilon}(y) = & \quad \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{\frac{F_{(X,Y)}(x+\epsilon, y) - F_{(X,Y)}(x,y)}{\epsilon}}{\frac{F_X(x+\epsilon) - F_X(x)}{\epsilon}} \\
= & \quad \frac{\frac{\partial}{\partial x} F_{(X,Y)}(x,y)}{\frac{d}{dx} F_X(x)} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} F_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} \\
= & \quad F_{Y|X=x}(y)
\end{aligned}$$

bedingte Verteilungsfunktion von Y unter der Bedingung $X = x$.

Bedingte Dichte von Y unter der Bedingung $X = x$:

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{\frac{\partial \boldsymbol{F}_{(}\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{x}}}{f_{\boldsymbol{X}}(x)}\right) = \frac{f_{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}}{f_{\boldsymbol{X}}(x)}$$

Die bedingte Dichte hat die Eigenschaft einer Dichtefunktion.

Bedingte Verteilung stetiger ZV

Variierende Belastungsbedingungen bei einer Anlage
X_1 Belastung, X_2 Lebensdauer

Gemeinsame Dichte:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 \exp^{-x_1 x_2} & 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Frage: Soll Belastung kontrolliert werden z.B. Wert 0.7 ?
Bedingte Dichte von X_2 unter der Bedingung $X_1 = 0.7$

$$f_{X_2|X_1=0.7}(x_2) = \frac{f_{(X_1,X_2)}(x, y)}{f_{X_1}(0.7)}$$

Zuerst: Berechnung der Randdichte von X_1 :

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) dx_2 = \int_{0}^{\infty} x_1 \exp^{-x_1 x_2} dx_2 = 1, x_1 \in [0, 1]$$

$\Rightarrow X_1$ gleichverteilt auf $[0, 1]$

Damit bedingte Dichte:

$$f_{X_2|X_1=x_1}(x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \exp^{-x_1 x_2}}{1} = x_1 \exp^{-x_1 x_2} & \text{für } x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{für } x_2 < 0 \end{cases}$$

Resultat: Exponentialverteilung mit Parameter x_1.
Somit: $\frac{1}{x_1}$ mittlere Lebensdauer, x_1 Ausfallrate.

Bei kontrollierter Belastung mit Wert x_1 steigt die Lebensdauer (bzw. fällt die Ausfallrate) mit fallendem x_1.
Bedingte Dichte hängt von der Bedingung $X_1 = x_1$ ab.
$(x_2 \geq 0)$

Überprüfungsaufgabe: Berechnung der Randverteilung von X_2

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2)dx = \int_0^1 x_1 e^{-x_1 x_2} dx_1$$

$$= \left[-x_1 \cdot \frac{1}{x_2} e^{-x_1 x_2} \right]_0^1 = -\frac{1}{x_2} e^{-x_2}$$

Zusammenfassung

Im **diskreten** Fall:

Bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y unter der Bedingung $X = x$ mit $P(X = x) \neq 0$:

$P(Y = y|X = x) = \frac{P(Y=y,X=x)}{P(X=x)}$

für alle Werte y von Y. Zu vergleichen mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y.

Zusammenfassung

Im **stetigem** Fall:

bedingte Dichte von Y unter der Bedingung $X = x$ mit $f_X(x) \neq 0$:

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f X, Y(x,y)}{f_{\mathbf{X}}(x)}$$

zu vergleichen mit der Randdichte von Y.

Unabhängigkeit

X und Y heißen unabhängig, wenn

(a) im diskreten Fall
die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y nicht von der Bedingung abhängt und mit der Verteilung von Y übereinstimmt

(b) Im stetigen Fall
die bedingte Dichte nicht von der Bedingung abhängt und mit der Randdichte übereinstimmt

formal - Unabhängigkeit

(a) $P(Y = y|X = x) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)} = P(Y = y)$

$\Rightarrow P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$, für alle x und y

(b) $\frac{f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,y)}{f_{\mathbf{X}}(x)} = f_Y(y)$

$\Rightarrow f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, für alle x und y

formal - Unabhängigkeit

Aus (a) bzw. (b) folgt:

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y), \text{ für alle } x \text{ und } y$$

Die Umkehrung gilt auch (Übungsaufgabe).

Die Definition lässt sich ausdehnen für $X_1, \ldots, X_n$ mit $n > 2$.